Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE LA TRANSITION
ÉCOLOGIQUE ET SOLIDAIRE

MINISTÈRE DE LA COHÉSION
DES TERRITOIRES ET DES RELATIONS
AVEC LES COLLECTIVITÉS TERRITORIALES

CONCOURS INTERNE
D'INGÉNIEUR DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ÉTAT
SESSION 2020

ÉPREUVE N°2
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit durant l'épreuve

Avertissement :
La qualité de la rédaction, le soin, l'orthographe, la clarté des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les éventuelles tentatives infructueuses devront être clairement barrées.

Les résultats devront être mis en évidence, en les soulignant ou en les encadrant à la fin de chaque question, en guise de conclusion.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t.$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **a.** Justifier l'existence de la fonction G.
- **b.** Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G.
- **c.** Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
- **d.** Calculer $f(1)$.

2.
- **a.** Établir, pour tout réel $x \geqslant 1$, l'inégalité $f(x) \geqslant \mathrm{e} \times \ln x$.
- **b.** En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3.
- **a.** Établir, pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leqslant \mathrm{e}^x \times \ln x$.
- **b.** En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

4.
- **a.** Dresser le tableau de variation de f.
- **b.** Étudier les variations de f'.
- **c.** Donner l'allure du graphe de f.

5.
- **a.** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t = n$.
- **b.** En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
- **c.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

2. La matrice A est-elle inversible ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

3. Déterminer un réel α non nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

4. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

5. Soit $C = A - I$. En notant $P(C) = I + \frac{1}{2} \cdot C + \alpha \cdot C^2$ et en utilisant les résultats de la question **1.**, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vetoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.
Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

- **a.** Calculer les vecteurs v et u.
- **b.** Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **c.** Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
- **d.** En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- **a.** Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
où a, b et c sont trois réels.
- **b.** Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

8. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

9. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 3

La probabilité d'un événement A est notée $\mathbb{P}(A)$, et pour tout événement B vérifiant $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.
L'évènement contraire d'un événement A sera noté $\overline{A}$.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables contenant chacune n boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(n-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient n boules blanches.

A - Temps d'attente dans l'urne 1

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note T la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera, pour tout entier naturel $i \in [\![1\ ,\ n]\!]$, N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».

1. Rappeler la formule des probabilités composées.

2. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}(T=1)$, $\mathbb{P}(T=2)$ et $\mathbb{P}(T=3)$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire T.

4. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

B - Une seconde expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note A_1 l'événement « l'urne U_1 a été choisie ».

5. Que vaut $\mathbb{P}(A_1)$?

6. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_1}(X=j) = \frac{1}{n}.$$

7. Calculer $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(X=j)$ pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$ (On distinguera les cas $j=n$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$).

8. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} & \text{si } j = n \end{cases}$$

9. Calculer l'espérance de X.