Ce problème traite des satellites de communication en quatre parties indépendantes mais cohérentes entre elles. Ces parties peuvent être traitées dans l'ordre voulu par le candidat.

Le soin, la rédaction et la rigueur de raisonnement seront pris en compte dans la notation.

Dans le sujet, les vecteurs sont notés en « **gras** ».
La dérivée temporelle pourra être notée d/dt ou par un point sur la variable dérivée. La dérivée temporelle seconde pourra être notée d^2/dt^2 ou par deux points sur la variable dérivée.

Données numériques :

- rayon de la Terre :	$R_T = 6{,}4.10^6$ m
- masse de la Terre :	$M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg
- constante de gravitation :	$G = 6{,}7.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
- célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}
- constante de Planck :	$h = 6{,}6.10^{-34}$ J.s
– charge de l'électron :	$e = 1{,}6.10^{-19}$ C

–

I. Orbites satellitaires

Le référentiel R (T,xyz) est supposé galiléen, son origine T coïncide avec le centre de masse de la Terre. La Terre est assimilée à un corps parfaitement sphérique si bien que le champ de gravitation qu'elle crée est le même que si toute la masse M_T était concentrée en son centre T.

Tous les mouvements orbitaux de ce problème appartiennent au plan Txy. Dans ce plan les mobiles ponctuels considérés sont repérés par les coordonnées polaires r, θ et les grandeurs vectorielles sont explicitées dans la base $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$ associée (fig. I.1) :

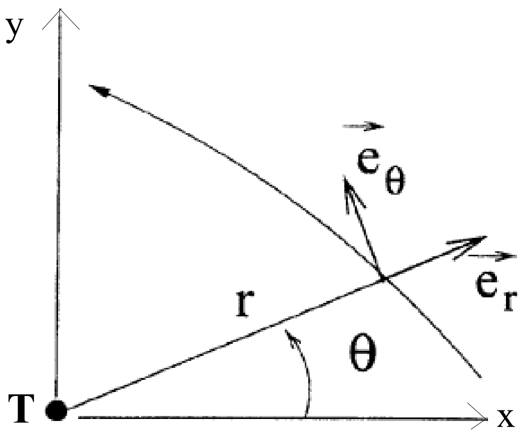

Figure I.1 – Base des coordonnées polaires

I.l. Rappeler les expressions polaires de la vitesse **v** et de l'accélération **a** en fonction des coordonnées r, θ et de leurs dérivées et des vecteurs unitaires $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$.

I.2. Exprimer la force de gravitation $\mathbf{F_T}$ exercée par la Terre sur un corps ponctuel de masse m situé à la distance r du centre de l'astre. On notera G la constante de gravitation universelle.

I.3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un corps ponctuel soumis à la seule force de gravitation $\mathbf{F_T}$ exprimée en I.2. On notera (**I**) et (**II**) les équations différentielles résultant de la projection du principe fondamental de la dynamique sur $\mathbf{e_r}$ et $\mathbf{e_\theta}$ respectivement. Montrer que l'on obtient les équations suivantes :

$$(\mathbf{I}) : r^2(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) = G.M_T \quad \text{et} \qquad (\mathbf{II}) : r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

I.4. Déduire de l'équation (**II**) que la quantité $r^2\dot{\theta}$ reste constante au cours du mouvement (intégrale première). Dans la suite de cette partie on posera :

$$(1) \qquad r^2\,\dot{\theta} = C \quad \text{(constante >0)}$$

I.5. On considère tout d'abord un corps ponctuel dont le mouvement géocentrique est circulaire de rayon r_1.

I.5.1. Justifier simplement que le mouvement est uniforme.

I.5.2. Établir une relation entre la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, le rayon r_1, la constante G et la masse de la Terre M_T.

I.5.3. Exprimer le rayon de l'orbite r_1 du corps autour de la Terre en fonction de G, M_T et de la période T de révolution.

I.5.4. On modélise ainsi l'orbite d'un satellite géostationnaire. Donner la période de révolution de ce satellite.

I.5.5. Calculer le rayon r_G de l'orbite d'un satelite géostationnaire.

I.6. On revient au cas général

I.6.1. Déduire des résultats établis aux questions 3 et 4 que le mouvement radial du corps, décrit par la distance $r(t)$, est solution de l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$(2) \qquad m.\,d^2r/dt^2 = m.\ddot{r} = F(r)$$

où F(r) est une « force généralisée » qui dérive de l'énergie potentielle « effective » $E_{p,ef}(r)$:

$$(3) \qquad E_{p,ef}(r) = \frac{mC^2}{2\,r^2} - \frac{GM_T\,m}{r}$$

I.6.2. Montrer qu'à l'équation (2) est associée l'intégrale première :

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2}\ m.\dot{r}^2 + E_{p,ef}(r) = Cte = E_m$$

I.7. L'allure de l'énergie potentielle $E_{p,ef}(r)$ est représentée sur la figure I.2.

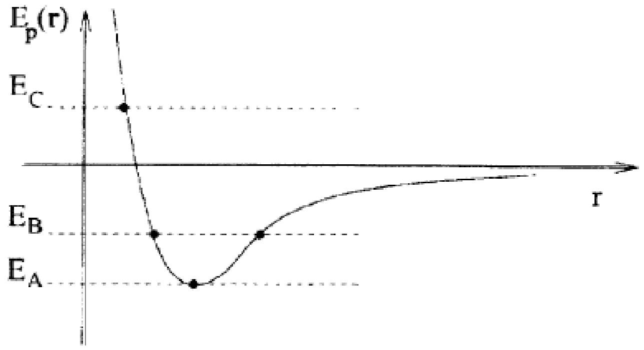

Figure I.2 – Énergie potentielle effective

I.7.1. Déterminer les valeurs des distances r_o et r_1 correspondants respectivement à l'annulation de $E_{p,ef}(r)$ et de $dE_{p,ef}(r)/dr$, les reporter sur une figure analogue à la figure I.2.

I.7.2. Décrire qualitativement le mouvement radial du corps dont 1'énergie mécanique E_m serait respectivement égale à E_A, E_B et E_C.

I.7.3. Retrouver le résultat établi à la question I.5.2.

I.8. Application: La technique de lancement en orbite géostationnaire systématiquement appliquée est la suivante : le satellite est placé sur une orbite circulaire basse (1) puis le dernier étage est allumé pour placer le satellite sur une orbite elliptique (2) dont l'apogée se situe à environ 36 000 km appelée orbite de transfert géostationnaire. Enfin un moteur d'apogée à propergol solide solidaire du satellite circularise l'orbite (3). *D'après Wikipedia*

I.8.1. Dans quel plan se trouve l'orbite géostationnaire ?

I.8.2. Relier la valeur 36000 km à un résultat obtenu précédemment.

I.8.3. Représenter sur un schéma légendé les différentes orbites suivies lors du lancement.

I.8.4. A quels moments l'énergie mécanique varie E_m ? Dans quel sens se fait cette variation ?

I.8.5. Aux différentes orbites, l'énergie mécanique E_m est-elle du type E_A, E_B et E_C de la figure I.2 ?

II. Émissions satellitaires

Eutelsat 12 West A est un satellite géostationnaire situé à 36 000 km d'altitude qui offre un service ITV (International TeleVision) et transmet une centaine de chaînes de télévision en clair dans plusieurs pays. Il émet à destination de petites antennes de réception (de 60 à 110 cm en Europe) situées directement chez les particuliers. En général les fréquences utilisées étaient dans la bande Ku (autour de 12 GHz).

II.1. Quel est l'intérêt d'un satellite *géostationnaire* pour ce type de transmission ?

II.2. Calculer le temps de propagation de l'émetteur à un récepteur à la verticale du satellite.

II.3. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se trouve la bande Ku ?

II.4. Donner les différents domaines du spectre électromagnétique. Indiquer pour chacun un ordre de grandeur de la fréquence et de la longueur d'onde.

II.5. Calculer la longueur d'onde d'un émission dans la bande Ku.

II.6. La taille minimum de l'antenne de réception est de l'ordre de celle de la longueur d'onde du signal. Est-il possible d'utiliser une antenne plus petite ? Discuter rapidement (au maximum trois lignes) des avantages et des inconvénients.

II.7. Approche quantique

II.7.1. Calculer l'énergie E' d'un photon dans la bande Ku.

II.7.2. Comparer cette énergie E' à celle E_i' d'un rayonnement ionisant (E_i' =1 eV).

II.7.3. Déterminer la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$ d'un photon de la bande Ku.

II.7.4. Un antenne parabolique reçoit un signal de puissance P de 0,5 pW, c'est-à-dire qu'elle reçoit 0,5 pJ d'énergie du satellite par seconde. Combien recevra-t-elle de photons par seconde ? Est-il possible de négliger l'aspect quantique pour se placer dans l'hypothèse d'un signal continu ?

III. Traitement des signaux du satellite

La parabole reçoit l'émission satellitaire. Le signal subit différents traitements dont deux filtrages électroniques. On peut modéliser ces filtres par des dispositifs passifs que l'on étudiera dans la partie suivante.

Dans cette partie, une grandeur X sera notée $\underline{X}$ en valeur complexe. Nous prendrons j^2= -1.

Les deux sous-parties, correspondant aux deux filtres successifs, peuvent être traitées de manière indépendantes.

III.1. Comportement en fréquence du premier filtre

Le premier filtre (ou filtre n°1) peut être modélisé par une bobine d'inductance L, un condensateur de capacité C et une résistance R en série. La tension d'entrée u_e est celle au borne du dipôle global RLC, la tension de sortie u_s est prise aux bornes de la résistance.

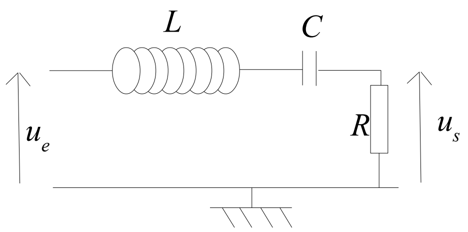

Figure III – Filtre n°1

III.1.1. Étude qualitative

III.1.1.1. Rappeler à quoi est équivalent un condensateur en basse fréquence, puis en haute fréquence. Même question pour la bobine.

III.1.1.2. Avec des schémas équivalents et sans calculs, déterminer la nature du filtre n°1.

III.1.2. Étude quantitative
On notera ω la pulsation de la tension sinusoïdale u_e.

III.1.2.1. Quelle est la relation entre la fréquence f d'une tension et sa pulsation ω ?

III.1.2.2. Donner l'impédance complexe de chaque composant du filtre, puis du dipôle équivalent au filtre lui-même.

III.1.2.3. Rappeler la définition de la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

III.1.2.4. Exprimer $\underline{H}$ en fonction de L, C, R et ω.

III.1.2.5. Montrer que l'on peut exprimer sous la forme $\underline{H} = \dfrac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$

III.1.2.6. Nommer et exprimer Q et ω_0 . Donner leurs unités.

III.1.2.7. Applications numériques
III.1.2.7.1. On désire un filtre avec une fréquence propre f_0 = 10 GHz. On dispose d'une capacité de 0,2 fF. Déterminer la valeur de l'inductance nécessaire.

III.1.2.7.2. On dispose de plusieurs inductances de 2 µH. Proposer un montage pour obtenir un inductance équivalente à 1 µF.

III.1.2.7.3. On désire un facteur de qualité de 10000. Déterminer la valeur de la résistance nécessaire.

III.1.2.7.4. Quel pourrait être l'intérêt d'un haut facteur de qualité pour ce filtre ?

III.2. Réponse à un échelon de tension du second filtre
Le second filtre (ou filtre n°2) peut être modélisé par un condensateur de capacité C' = 2,2pF et une résistance R' = 470 Ω en série.

III.2.1. Proposer, en le justifiant par des arguments qualitatifs, un montage pour obtenir un filtre passe-bas avec ces deux composants. Préciser sur le schéma les tensions d'entrée et de sortie du filtre (respectivement u_e' et u_s').

III.2.2. Aux bornes de ce filtre, nous plaçons une source pure de tension E. Le condensateur est initialement déchargé. À t = 0s, E passe instantanément de la valeur 0V à 2V.

III.2.2.1. Déterminer l'équation différentielle linéaire reliant u_e' et u_s' à $t > 0$s.

III.2.2.2. Montrer que l'on peut écrire cette équation sous la forme : $\frac{du_s'}{dt} + \frac{u_s'}{\tau} = \frac{u_e'}{\tau}$

avec $\tau = R'C'$.

III.2.2.3. Exprimer u_s' en fonction de E.

III.2.2.4. Exprimer en fonction de τ le temps nécessaire t_1 pour lequel $u_s' = 1{,}8$V. Calculer t_1.

IV. Observation de satellites

Les satellites géostationnaires sont très nombreux, et une antenne parabolique peut recevoir les signaux de plusieurs satellites. On cherche ici à les observer visuellement.

IV.1. Un œil distingue deux points distants d'au moins 1 mm à 3 m. Donner en degrés l'angle minimum de résolution de l'œil. Est-il possible de distinguer deux satellites à 0,01° d'écart à l'œil nu ?

IV.2. Pour mieux les distinguer, on utilise une lunette de Galilée faite de :

- un oculaire L_1 de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = -4$ cm
- un objectif L_2 de distance focale $f'_2 = +10$ cm.

Les lentilles sont sur un même axe optique, $\overline{O_1O_2} = +6$cm.

IV.2.1. Donner le type et la vergence de chaque lentille.

IV.2.2. Tracer le trajet optique de rayons lumineux provenant de l'infini parallèles à l'axe optique passant par L_2.

IV.2.3. Représenter la lunette par un schéma à l'échelle 1.

IV.2.4. Compléter le schéma par le trajet optique d'un rayon lumineux provenant de l'infini parallèle à l'axe optique.

IV.2.5. Tracer un nouveau schéma de lentille avec le trajet optique d'un rayon lumineux provenant de l'infini sous un angle α. Sous quel angle α' sera-t-il vu ?

IV.2.6. On définit le grossissement G = α'/α . Montrer que le grossissement de la lentille vaut 2,5 si les rayons sont peu éloignés de l'axe optique (c'est-à-dire tan α' ≈ α' et tan α ≈ α).

IV.2.7. Sous quel angle α' pourra-t-on voir l'écart entre les satellites à 0,01° d'écart à travers la lunette ? Pourra-t-on les distinguer ?

IV.2.8. Le satellite le plus à l'Est sera-t-il vu à gauche ou à droite à travers la lunette ?