L'énoncé comporte trois exercices indépendants. Les documents et les machines éléctroniques ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction, de la présentation, et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs, et à donner des preuves brèves mais complètes. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à 2. On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(x-1)\,P'(x) + P(x)$. On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie pour tout réel x par $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$.

1. Etude de f.

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) f est-il un automorphisme de E ?

   (c) Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies pour tout réel x par $R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1$ et $R_2(x) = (x-1)^2$.

   (d) Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base. Écrire la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

   (e) Vérifier que pour tout réel x : $\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$

   En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

   (f) Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left[A^{-1}\right]^n = Q\left[D^{-1}\right]^n Q^{-1}$ et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$

2. Suite d'épreuves aléatoires.

   On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

   On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

   — La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.

   — Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

   On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geqslant 0$). On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

   $$U_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_k = 0] \\ \mathbb{P}[X_k = 1] \\ \mathbb{P}[X_k = 2] \end{pmatrix} \text{ et } U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   où $\mathbb{P}[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

   (a) Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre).

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X_2.

   (c) Enoncer la formule des probabilités totales, et prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $U_{k+1} = A^{-1}U_k$.

   (d) Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0

   (e) Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

   $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}[X_k = 2] = 0$$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, dans un repère orthonormal, et $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

1. Etude de $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$. En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F.
   (b) Montrer que la fonction F est impaire. Exprimer en fonction de f la dérivée F' de F.
   (c) Etudier les variations de F sur $\mathcal{D}$. Donner la limite de F quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Montrer que F réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur un intervalle J à préciser.
   (e) On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ les fonctions : $cosh(t) = cos(it)$ et $sinh(t) = isin(it)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^t = sinh(t) + cosh(t)$ et $cosh^2(t) - sinh^2(t) = 1$.
   (f) En déduire que la bijection réciproque F^{-1} est $sinh$.
2. Calcul de l'aire de l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda$.
   (a) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$, et montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f puis donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{E}_\lambda$ dans le même repère plan.
   (c) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
3. Etude de la suite (u_n) définie par $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.
   (a) Calculer u_0 et u_1, puis u_2 grâce à une intégration par parties.
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. (*On ne cherchera pas sa limite dans cette question*)
   (d) Justifier que : $\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$. En déduire la limite de (u_n).
4. Etude de l'équation différentielle (E) : $(x^2+1)y''(x) + 2xy'(x) + \dfrac{y(x)}{x^2+1} = 1$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{sin(arctan(x))}{cos(arctan(x))} = x$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos(arctan(x)) = f(x)$ et $sin(arctan(x)) = xf(x)$.
   (c) En utilisant le changement de variable $x = tan(t)$ montrer que résoudre (E) équivaut à résoudre :
   $$(\text{E}') : z''(t) + z(t) = 1 + tan^2(t), \ t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$
   (d) Les équations (E) et (E') sont-elles des équations différentielles linéaires à coefficients constants ? Préciser leur ordre.
   (e) Montrer que $\{sin, cos\}$ est une famille libre de l'ensemble $\mathcal{S}_0'$ des solutions homogènes de (E').
   (f) Soit $L : \mathcal{S}_0' \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (z(0), z'(0))$. Montrer que L est un isomorphisme. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0'$ des solutions homogènes de (E') ? En donner une base.
   (g) montrer que $t \mapsto -1 + \dfrac{sin(t)}{2} ln\dfrac{1+sin(t)}{1-sin(t)}$ est une solution particulière de (E'). En déduire l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de (E').
   (h) En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est de la forme
   $$\mathcal{S} = \{x \mapsto y(x) = -1 + xF(x)f(x) + \alpha f(x) + \beta x f(x); \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 3

Un parachutiste tombe à une vitesse de $v_0 \geq 0$ au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note $v(t)$ la vitesse (en m/s) du parachutiste à l'instant t. On admet que la résistance de l'air est quadratique en v, ce qui conduit, d'après le principe fondamental de la dynamique, à l'équation différentielle du premier ordre non-linéaire :

$$v'(t) = g(1 - \frac{v(t)^2}{25}), \text{ pour } t > 0, \text{ et } v(0) = v_0 \tag{1}$$

On rappelle que $g \sim 10m/s^2$, que la vitesse v est la dérivée de la position u, et que le parachutiste atteint sa vitesse limite de descente quand celle-ci est constante.

1. Justifier l'existence d'une solution *constante* sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle (1). On notera cette constante v_{lim} : c'est la vitesse limite de descente du parachutiste.

   Dans la suite, on admet l'existence et l'unicité d'une solution v au problème (1) pour tout $v_0 \in \mathbb{R}$. Et on note $\mathcal{C}_{v_0}$ la courbe représentative du graphe de la fonction v.

2. On suppose que $v_0 = 55\ m/s$. On introduit la fonction $z : t \mapsto \dfrac{1}{v(t) - 5}$, si $v(t) > 5$.
   (a) Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle : $25z'(t) - 10gz(t) = g$ pour $t > 0$. Préciser la condition initiale sur z, puis donner l'expression explicite de z.
   (b) Montrer que pour tout $t > 0$: $v(t) = \dfrac{1}{(3/25)exp(2gt/5) - 1/10} + 5$, et évaluer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.
   (c) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_{v_0}$, la courbe représentative du graphe de la fonction $t \mapsto v(t)$ et son asymptote.

3. On suppose maintenant que $v_0 = 0\ m/s$. On introduit la fonction $z : t \mapsto \dfrac{1}{v(t) - 5}$, si $v(t) < 5$.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ln(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2})$. En déduire une primitive de la fonction réelle (appelée tangente hyperbolique) $tanh : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.
   (b) Montrer que pour tout $t > 0$: $v(t) = a[tanh(bt)]$, avec les constantes réelles a et b à déterminer.
   (c) Montrer que la vitesse du parachutiste est une fonction croissante et présente une asymptote horizontale que vous préciserez.
   (d) On donne le développement limité suivant : $tanh(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^7)$. En déduire un développement limité de v en 0 à l'ordre 3. Expliciter l'équation de la tangente de v en 0.
   (e) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_{v_0}$, la courbe représentative du graphe de $t \mapsto v(t)$ et la tangente à $\mathcal{C}_{v_0}$ en 0.
   (f) On suppose que le parachutiste saute de $4000m$. Donner l'expression exacte de la position du parachutiste en fonction du temps : $u(t) = \displaystyle\int_0^t v(s)ds + k$, avec la constante réelle k à déterminer.
   (g) Evaluer la durée T de la descente du parachutiste depuis son point de chute à 4000 m jusqu'au niveau du sol supposé à 0 (écrire l'équation que doit vérifier T, puis utiliser la fonction f).
   (h) Si le parachute ne s'ouvre qu'à 1000m du sol, une partie de la chute s'effectue avec une résistance de l'air linéaire. On admet que dans cette phase de durée $T > 0$, la vitesse du parachutiste est donnée par la fonction $V : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto V(t) = 55(1 - exp(-t/25))$. Evaluer la durée de la descente du point de chute à 4000m jusqu'au niveau du sol supposé à 0. Que remarquez-vous ?

4. Les solutions de l'équation différentielle (1) ont-elles la même monotonie ? Argumenter votre réponse.
5. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions (1) est-il un espace vectoriel ? Argumenter votre réponse.