Sujet 8 : Epreuve orale de mathématiques du concours interne ITPE 2017

Dans un premier temps, vous disposez de 30 minutes pour préparer au choix un des deux exercices. Dans un second temps, vous présenterez sa solution détaillée durant votre audition de 30 minutes. Il n'est pas nécessaire de terminer un exercice pour obtenir une note honorable. Par ailleurs, toute démarche de résolution, de question, même infructueuse, pourra être présentée lors de l'interrogation.
Ne rien écrire sur le sujet que vous rendrez à la fin de l'épreuve orale. Les documents et les machines éléctroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1 Soit le polynôme $P = X^6 + 1$, alors :

1. P est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? Donner une factorisation irréductible de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
3. $P = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1)$ est-elle une factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
4. $P = (X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$ est-elle une factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
5. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires peut-on affirmer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?

Exercice 2 On note pour tout entier non nul n, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors :

1. Montrer que $H_n = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x - 1}\,\mathrm{d}x$
2. Vérifier que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. H_n converge-elle quand n tend vers l'infini ?
4. Etablir que les suites de termes généraux $u_n = H_n - ln(n)$ et $v_n = H_n - ln(n+1)$ sont adjacentes.
5. Donner un équivalent de H_n quand n tend vers l'infini.

Sujet 1 : Epreuve orale de mathématiques du concours interne ITPE 2017

Dans un premier temps, vous disposez de 30 minutes pour préparer au choix un des deux exercices. Dans un second temps, vous présenterez sa solution détaillée durant votre audition de 30 minutes. Il n'est pas nécessaire de terminer un exercice pour obtenir une note honorable. Par ailleurs, toute démarche de résolution, de question, même infructueuse, pourra être présentée lors de l'interrogation.
Ne rien écrire sur le sujet que vous rendrez à la fin de l'épreuve orale. Les documents et les machines éléctroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1 Soient $F_1 = Ker(A+I)$ et $F_2 = Ker((A+I)^2)$ avec

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle inversible ?
2. Montrer que $\chi_A : x \mapsto det(A - xI)$ est un polynôme ayant pour racine -1.
3. Déterminer F_1 et F_2. A-ton $E = Vect(1,1,1) \subset F_2$? $F_2 \subset F_1$?
4. F_2 et F_1 sont-ils supplémentaires ?
5. Soit (u, v) deux vecteurs libres de F_2, montrer qu'il existe w tel que (u, v, w) forment une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w). Montrer que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + x^2 + x^3 + ... + x^n - 1$.
1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$, pour $n > 1$.
2. Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante.
3. Proposer un algorithme donnant les termes de la suite $(x_n)_n$.
4. Montrer que $x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n$, pour $n > 1$.
5. Montrer que x_n^n tend vers 0 pour n tendant vers l'infini.
6. En déduire la limite de la suite $(x_n)_n$.
7. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à f_n sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$?
8. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires peut-on affirmer que $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ pour tout entier $n \geq 1$?

Physique

Sujet 1 :

La fréquence de vibration de la molécule de bromure d'hydrogène *HBr* est $f = 7{,}7.10^{13}$ Hz. On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de brome fixe par un « ressort » de raideur k.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de brome fixe.
2. Calculer k.
3. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $hf/2$ avec h constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.
5. Estimer l'énergie de liaison de la molécule.
6. Dans quel domaine la molécules absorbe-t-elle ?

Données : Masses molaires de l'hydrogène et du brome : M(H) = 1,0g/mol et M(Br) = 79,9g/mol
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1}
Charge de l'électron : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
Constante de Planck : $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s

Sujet 8 :

L'arrivée d'une course cycliste se joue en ligne droite. A ce moment de la course, et jusqu'à la fin, un concurent développe une puissance constante P. Il subit le frottement de l'air, modélisé par une force $\vec{F}_f$ proportionnelle au carré de la vitesse $\vec{v}$. Les autres forces sont négligées et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans le sens de mouvement du cycliste.
On donne : $\vec{F}_f = -kv.\vec{v}$ avec k constante positive.

1. Appliquer le théorème de la puissance cinétique au cycliste pour établir l'équation différentielle vérifiée par v. Montrer qu'elle peut être mise sous la forme :
   $$mv^2 \frac{dv}{dx} = k(v_l^3 - v^3)$$
2. On pose $f(x) = k(v_l^3 - v^3)$, déduire l'équation différentielle vérifiée par f.
3. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x. Donner l'allure de l'évolution de la vitesse selon la vitesse de départ.
4. Avec une puissance développée de 2 kW et une vitesse limite de 72 km/h, déterminer le coefficient de frottement de l'air (k) et la distance caractéristique pour qu'un coureur de 85 kg atteigne sa vitesse limite. Conclure.