La guitare électro-acoustique

*Ce problème traite de la vibration d'une corde de guitare, de la transmission du signal par un câble coaxial et de l'émission du son par un haut-parleur. Les parties **I, II, III** et **IV** sont indépendantes entre elles, les sous-parties A, B et C peuvent aussi être traitées de façon indépendantes.*

Le soin, la rédaction et la rigueur du raisonnement seront pris en compte dans la notation.

Dans le sujet, les grandeurs complexes sont soulignées et $j^2 = -1$. Comme sur le sujet, la dérivée temporelle d'une variable pourra être notée par un point sur celle-ci.

Dans le cas où un (e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur dans l'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose une correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

I/ Introduction

On commence l'étude par l'expérience 1 suivante, le point M étant libre :

Photo 1

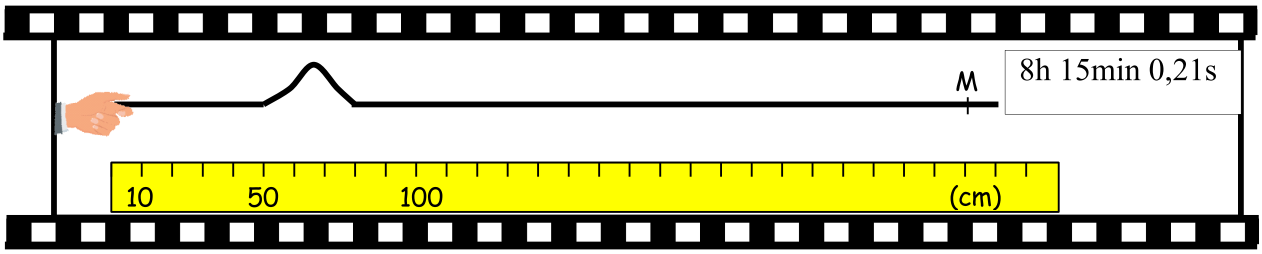
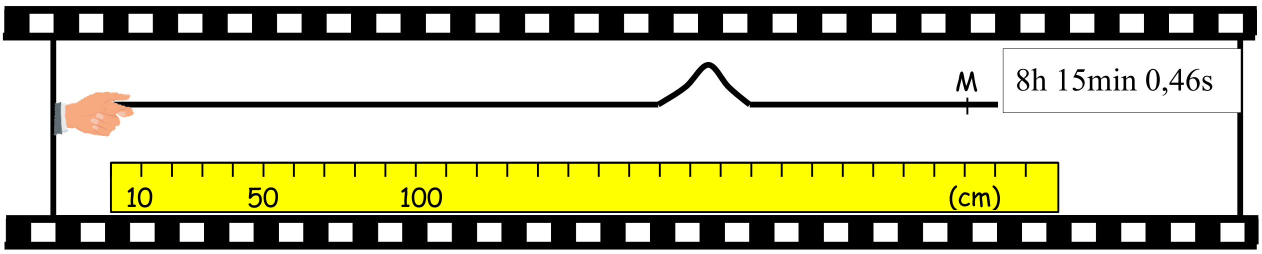


Photo 2



Document 1 : Photogramme de l'expérience 1

1/ Qualifier l'onde étudiée (3 adjectifs).

2/ Déterminer la célérité de l'onde.

3/ A quelle date le point M se soulève-t-il ?

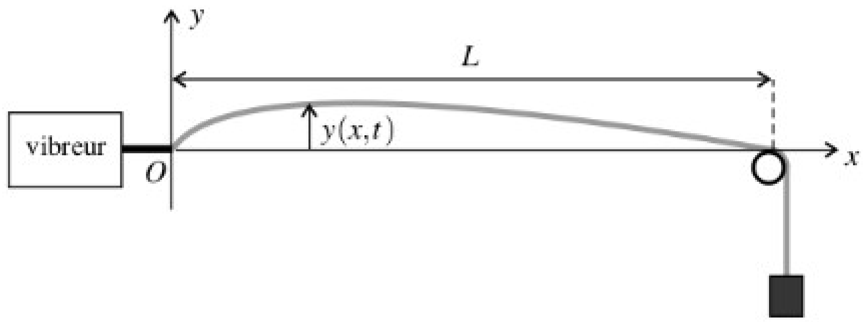
4/ Quelle est la durée du signal ?

5/ Si le point M est fixé, que se passe-t-il ?

II/ Etude de la corde de guitare

A/ Etude mécanique de la corde vibrante

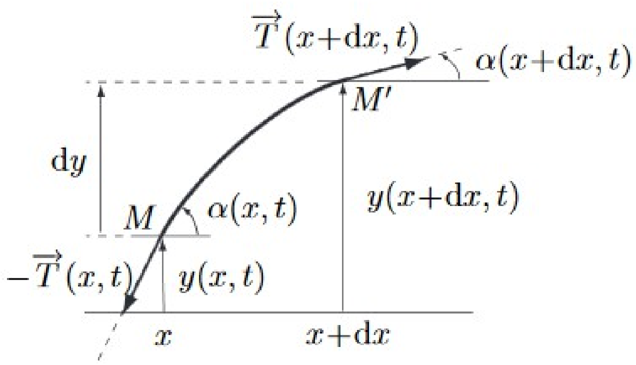
On continue par l'expérience de la corde de Melde. Cette corde est supposée inextensible, de longueur L, de masse linéique μ. Elle est tendue à la tension T_0 l'aide d'une masse accrochée à la corde via une poulie parfaite et excitée par un vibreur de mouvement vertical $a.\cos(\omega t)$ à son autre extrémité.
On appelle $y(x,t)$ le déplacement transversal d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t.



Document 2 : Schéma de l'expérience de la Corde de Melde

Pour l'étude mathématique, trois hypothèses sont nécessaires :
- On négligera le déplacement de la corde suivant l'axe des x, tant et si bien que un point de la corde situé en (x, 0) à l'équilibre se retrouve en (x, $y(x,t)$) lors de la vibration de la corde.
- On supposera le déplacement de la corde faible de manière à ce que l'angle $\alpha(x,t)$ de la corde avec l'horizontale est faible et donc on se limite à ordre 1 dans les développements limités en cet infiniment petit.
- On néglige le poids du fil devant sa tension.

6/ On considère l'élément de corde de longueur dl situé entre les plans x et x+dx. Montrer que, lorsque la corde est en mouvement : $\mathrm{d}l \approx \mathrm{d}x$



Document 3 : Schéma de l'élément de corde MM' hors équilibre (très agrandi)

7/ Indiquer la signification des différents termes représentés dans le document 3.

8/ Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'élément de corde MM' de masse dm.

9/ Montrer que $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial (T\alpha)}{\partial x}$.

10/ En considérant $T\alpha = T_0\alpha$ au premier ordre, montrer que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. (1)

11 / Comment appelle-t-on cette équation ? Quelle est l'expression de la célérité de l'onde associée ?

12 / Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour c.

13/ Calculer c pour $\mu = 3$ g.m^{-1} et $T_0 = 103$ N.

B/ Etude de la corde en résonance

14/ En variant la fréquence du vibreur, on observe parfois un mouvement de la corde d'amplitude très supérieure à celle du vibeur. Quel est ce phénomène ?

15/ Expliquer en quelques lignes la cause de ces grands mouvements de la corde.

16/ Définir le terme onde stationnaire.

17/ A quelle condition une variable du type $y(x,t) = f(x).g(t)$ peut-elle être solution de l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$?

18/ En supposant $f(x) = A\cos(kx + \psi)$ et $g(x) = B\cos(\omega t + \varphi)$, nommer k et ω.

19/ Quelle relation est imposée sur k et ω pour que $y(x,t) = f(x).g(t)$ soit solution de l'équation donnée en 17 ?

20/ Définir les modes propres et les fréquences propres de la corde.

21/ Quelles sont les conditions aux limites sur la corde dans l'expérience ?

22/ Montrer que les fréquences propres sont $f_n = n\frac{c}{2\mathrm{L}}$, avec n entier naturel.

23/ Donner les longueurs d'ondes correspondantes.

24/ Définir les ventres et les nœuds de vibration. Exprimer en fonction de la longueur d'onde λ_n les distances d_1, d_2 et d_3 suivantes :

- d_1 entre deux ventres consécutifs ?
- d_2 entre deux nœuds consécutifs ?
- d_3 entre un ventre et un nœud consécutifs ?

25/ Dessiner l'aspect de la corde à différents instants pour n = 1, n = 2 et n = 3.

26/ Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

27/ On considère la corde dont on a donné les caractéristiques à la question 13. Elle permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ?

28/ Comment obtenir un ré$_3$ (294 Hz) avec cette corde de guitare ?

C/ Analyse fréquencielle

Le mouvement le plus général de la corde est obtenu par la superposition linéaire de ses modes propres, soit :

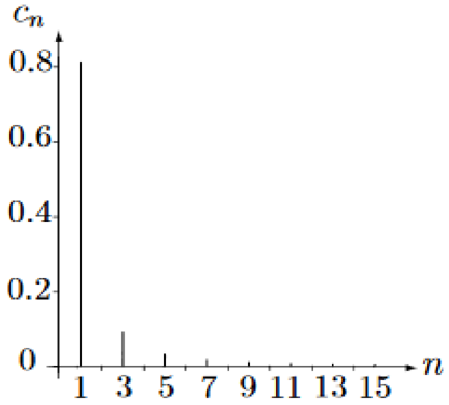
$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x+\psi_n\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t+\phi_n\right)$$

où les A_n, ψ_n et ϕ_n sont des constantes quelconques.

29/ Comment appelle-t-on ce type de fonction mathématique ?

30/ Justifier que $\psi_n = 0$ pour tout n.

On donne dans le document 4 le spectre calculé pour une corde pincée à la moitié de sa longueur.



Document 4 : Spectre pour une corde pincée en L/2

31/ A quoi correspondent l'abscisse et l'ordonnée du document 4 ? Donner une unité possible pour chaque axe.

32/ Désigner et donner les valeurs de n correspondant au fondamental et aux harmoniques.

33/ Justifier les valeurs de c_n pour les valeurs paires de n.

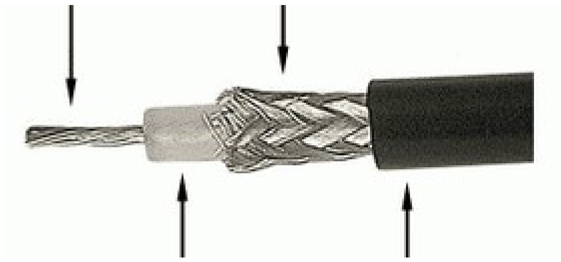
34/ Donner l'expression de $y(x,t)$ en se limitant aux trois premiers termes (on utilisera ϕ_1, ϕ_3 et ϕ_5).

35/ Le spectre de l'onde sonore est différent de celui du document 4. Donner deux raisons à ces différences.

III/ Transmission au haut-parleur

La guitare est reliée à l'amplificateur, puis au haut-parleur, par un câble coaxial. Un câble coaxial est constitué des deux cylindres conducteurs, l'un creux (tresse métallique) et l'autre plein (âme), de même axe (d'où le nom de coaxial) et séparés par un isolant (diélectrique) de permittivité relative ε_r , le tout dans une gaine. Le câble est caractérisé par sa capacité linéique γ (le câble est comme un condensateur) et son coefficient d'auto-inductance ι (le câble est comme une bobine).

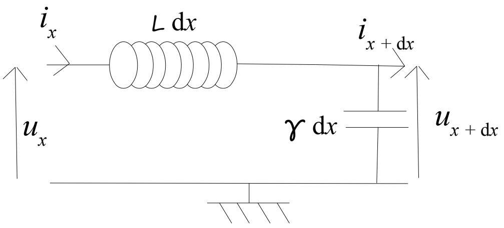
36/ Recopier et légender le schéma suivant.



On donne : $\gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$ et $\iota = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ les expressions respectives de la capacité et de l'inductance linéiques avec r_1 le rayon intérieur, r_2 le rayon extérieur du diélectrique, ε_0 la constante de la loi de Coulomb, ε_r la permittivité relative de l'isolant et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Par la suite, le câble sera supposé de longueur infinie et on négligera les effets de bord.

Un élément de câble de longueur infinitésimale dx peut être représenté schématiquement comme l'indique le document 5.



Document 5 : Schéma équivalent d'un élément de cable coaxial

Données : r_1 = 0,50 mm , r_2 = 1,75 mm , $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} , ε_r =2,25 et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

37/ Calculer γ et ι. Donner leurs unités.

38/ Appliquer les lois de l'électricité sur cet élément de circuit, trouver les deux relations reliant d'une part $u_{x+\mathrm{d}x}$, u_x, i_x et d'autre part $i_{x+\mathrm{d}x}$, u_x, i_x .

39/ Déterminer les équations aux dérivées partielles liant l'intensité $i(x,t)$ et la tension $u(x,t)$.
Montrer que l'on a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\iota\dfrac{\partial i}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}$

40/ En déduire les équations d'onde vérifiées par $i(x,t)$ et $u(x,t)$.

41/ Exprimer la vitesse de propagation v des ondes de courant et de tension en fonction de γ et ℓ, puis en fonction de ε_r , ε_0 et μ_0 . Calculer sa valeur.

42/ Calculer le temps de retard pour un câble de 10 m.

On considère $u(x,t)$ une onde de tension sinusoïdale, progressive, de pulsation ω_2 , se propageant le long du câble dans le sens des x croissants. On définit en notation complexe :

$$\underline{u}(x,t) = u_0.\exp j(\omega_2 t - k_2 x) \qquad \text{et} \qquad \underline{i}(x,t) = i_0.\exp j(\omega_2 t - k_2 x)$$

43/ Déterminer la relation entre ω_2 et k_2 pour $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$ vérifiant le système d'équations de la question 39.

44/ Montrer qu'en tout point du câble le rapport $\underline{u}(x,t) / \underline{i}(x,t)$ est égal à une constante que l'on notera R_C.

45/ Calculer R_C.

On s'intéresse maintenant à l'effet du câble sur les signaux transmis selon leurs fréquences.

46/ Rappeler à quoi est équivalent un condensateur en basse fréquence, puis en haute fréquence. Même question pour la bobine.

47/ Avec des schémas équivalents et sans calculs, déterminer la nature du filtre équivalent au câble coaxial dans son ensemble.

48/ Donner sans démonstration la fréquence propre de ce filtre ω_0 pour un câble de 10 m ?

49/ Ce comportement fréquentiel est-il gênant pour l'utilisation qui en est faite ?

Une modélisation plus précise de l'élément du câble coaxial, prenant en compte les pertes, est faite en ajoutant une résistance r_l en série avec l'inductance et autre r_c en parallèle avec le condensateur.

50/ Quelle résistance r_l ou r_c est la plus grande ? Justifier.

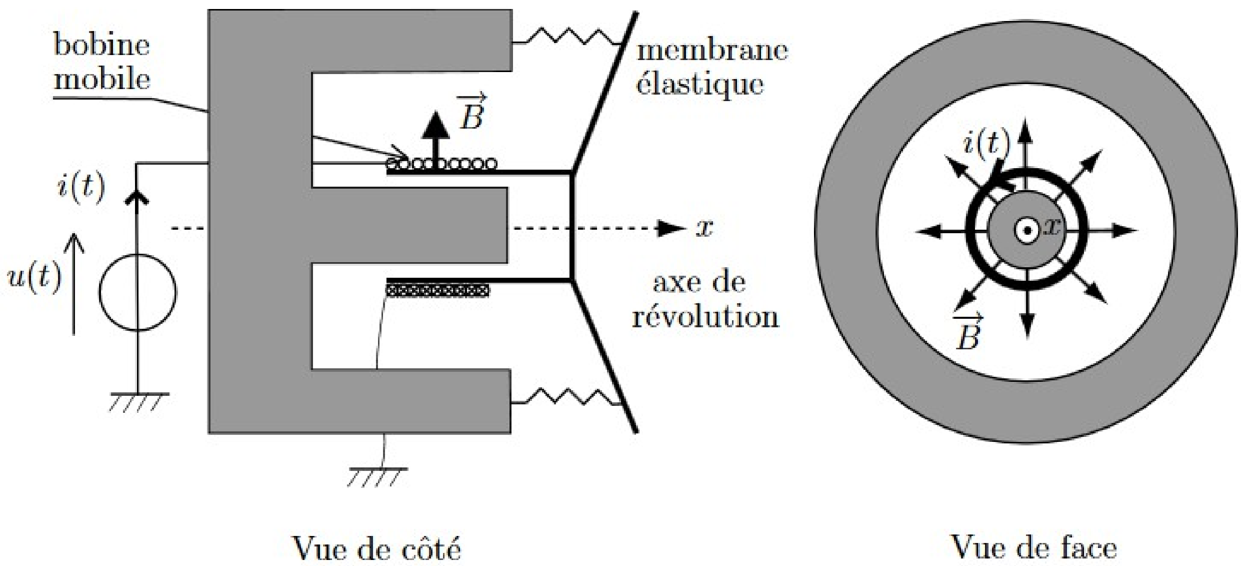
IV/ Restitution du son par un haut-parleur

Un haut-parleur électrodynamique est constitué :
• d'un aimant annulaire d'axe Ox, créant un champ magnétique radial permanent $\vec{B} = B\,\vec{e}_r$ de norme uniforme B dans l'entrefer ;
• d'une bobine indéformable de même axe Ox comportant N spires de rayon a, placée dans l'entrefer de l'aimant ;
• d'une membrane $\mathcal{M}$ perpendiculaire à l'axe et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre grâce à un assemblage se comportant comme un ressort unique de raideur k.

L'ensemble mobile {bobine + membrane}, de masse m, repéré par l'abscisse $x(t)$, est de plus soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'air de la forme $\vec{F} = -f\,\dot{x}\,\vec{e}_x$.

La bobine a une résistance R et une inductance L

Il peut être schématisé de la façon suivante :



Document 6 : Représentation du haut-parleur selon deux axes

A/ Détermination des équations mécanique (EM) et électrique (EE)

51/ Quelle force supplémentaire F_L s'exerce lorsque la bobine est traversée d'un courant i ? Indiquer le sens de cette force selon i.

52/ Donner l'expression de cette force F_L.

53/ Appliquer le second principe de la dynamique à l'ensemble mobile {bobine + membrane}. Vous choisirez l'origine de l'axe (Ox) au niveau de la position d'équilibre lorsque la bobine n'est parcourue par aucun courant. Vous obtiendrez l'équation mécanique (EM).

54/ Lors de son utilisation, une force électromotrice $e(t)$ apparaît dans la bobine. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

55/ Calculer $e(t)$.

56/ Montrer que la force électromotrice induite totale est $e_T(t) = 2\pi NaBv(t) - \mathrm{L}di/dt$

57/ Représenter le schéma électrique équivalent à l'ensemble alimentation-bobine en mouvement.

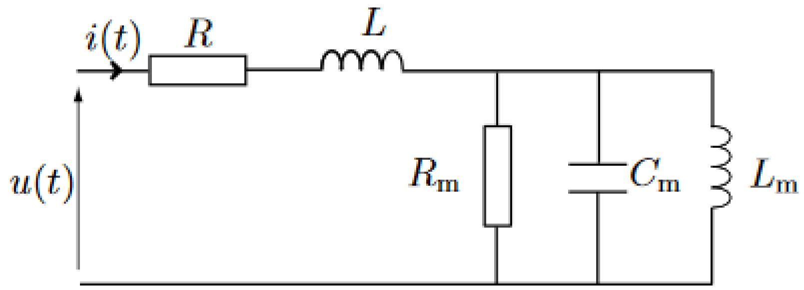
58/ Appliquer la loi des mailles pour obtenir l'équation électrique (EE).

59/ En prenant la tension $u(t)$ sinusoïdale : $u(t)=U_o\cos(\omega t)$. Ecrire l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) en notation complexe en fonction de $\underline{V}$ et $\underline{I}$, respectivement vitesse de l'ensemble {bobine + membrane} et intensité du courant en notation complexe, de même pulsation que $\underline{u}$.

60/ Montrer que l'on a $U_0 = \left(R + jL\omega + \dfrac{1}{\dfrac{f}{(2\pi NaB)^2} + \dfrac{jm\omega}{(2\pi NaB)^2} + \dfrac{k}{j(2\pi NaB)^2\omega}}\right)\underline{I}$

B/ Comportement en fréquence

On peut représenter le comportement électrique du haut-parleur comme suit :



Document 7 : Schéma électrique équivalent au haut-parleur

61/ Donner l'impédance complexe de chaque élément du filtre soumis à un courant de pulsation ω.

62/ Exprimer l'impédance totale $\underline{Z}$ du haut-parleur.

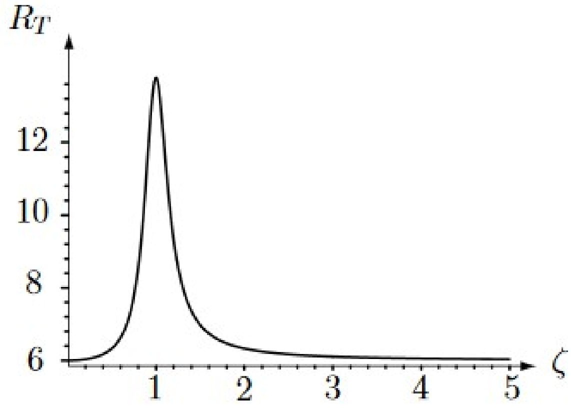
63/ Etablir les expressions de R_m, C_m et L_m en fonction de N, a, B, f, k et m. Vous pourrez reprendre sans justification l'expression donnée en 60/.

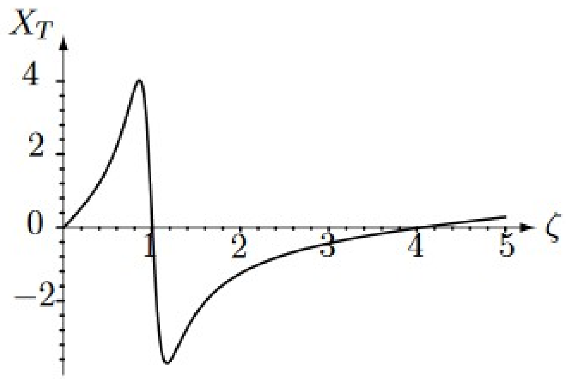
64/ Calculer R_m, C_m et L_m avec m = 3,85 g, k = 1200 N.m^{-1}, $2\pi NaB$ = 2,3 T.m , f = 0,68 kg.s^{-1}.

On pose $\underline{Z} = R_T + jX_T$ où $j^2 = -1$.

65/ Donner l'expression de $R_T(\omega)$ et $X_T(\omega)$ en fonction de R, R_m, C_m, L_m et ω.

On pose $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\zeta=\frac{\omega}{\omega_0}$. Les courbes $R_T(\zeta)$ et $X_T(\zeta)$ pour le haut-parleur étudié, avec R = 6Ω et L = 0,285 mH, sont d'allure suivante :





Document 8 : Représentation des courbes $R_T(\zeta)$ et $X_T(\zeta)$

66/ A partir du document 8, calculer le module et l'argument de $\underline{Z}$ pour $\omega = \omega_0$, $\omega = 2\omega_0$ et $\omega = 0{,}6\omega_0$.

67/ Justifier les valeurs de R_T en hautes et basses fréquences.

68/ Justifier la valeur de la résonance pour R_T.

69/ Calculer la valeur de la fréquence de résonance pour ce haut-parleur.