Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans tout cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs sont différents.
(On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours des N premiers lancers).
Ainsi, si les 10 premiers lancers ont donné successivement :

Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile et Face

alors la variable X_{10} prend la valeur 5 (il y a eu cinq changements, aux $3^{ième}, 4^{ième}, 5^{ième}, 8^{ième}$ et $10^{ième}$ lancers).

1. Justifier brièvement que $X_N(\Omega) = \{0, \cdots, N-1\}$.

2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer que :

a. $\mathbb{P}(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$.

b. $\mathbb{P}(X_N = N-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$.

c. $\mathbb{P}(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$.

4. a. Justifier que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$: $\mathbb{P}([X_{N+1} = k] \mid [X_N = k]) = \frac{1}{2}$.

b. En déduire que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$:
$$\mathbb{P}([X_{N+1} = X_N] \cap [X_N = k]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k).$$

c. En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que : $\mathbb{P}(X_{N+1} = X_N) = \frac{1}{2}$.

d. Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. a. Montrer grâce aux résultats **4b** et **4c** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b. En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$.
En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on veut établir la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ la série de terme général u_n pour $n \geqslant 1$.

Dans la suite, on notera : $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} \quad$ et $\quad A_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k.$

1. a. Justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}.$

b. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, vérifier que : $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{a-b}{2}}\right).$

En déduire, en utilisant une formule d'Euler, que : $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| = 2\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|.$

c. Justifier brièvement que : $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|.$

d. En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |A_n| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|}.$

2. En remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \sin(k) = A_k - A_{k-1}$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad S_n = \frac{1}{n}A_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Quelle est la nature de la série $\left(\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\geqslant 1}$?

4. Conclure.

Partie B.

Dans cette partie, on veut établir la convergence et déterminer la somme de $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ la série de terme général $(-1)^n u_n$ pour $n \geqslant 1$.

5. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif.

a. Justifier que : $\quad \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)\right) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t.$

b. Montrer qu'il existe un réel M, indépendant de λ, tel que : $\quad |f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)| \leqslant M.$

c. Montrer que : $\quad \left|\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t.$

d. En déduire que : $\quad \displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0.$

6. a. Pour tout réels a et b, rappeler, sans justification, les expressions de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ en fonction de $\cos(a), \cos(b), \sin(a)$ et $\sin(b)$.

b. En déduire l'expression de $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

c. Exprimer, pour tout réel t et tout entier k, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

d. En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

e. Montrer alors que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k = (-1)^n\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.$

On pourra commencer par remarquer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_0^1 \cos(kt)\mathrm{d}t = u_k.$

7. Utiliser la question **5.** pour conclure que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est magique lorsque la somme des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales sont égales.
Ainsi, par exemple, les matrices dont tous les coefficients sont égaux sont bien évidemment magiques, et les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ le sont également.

L'objectif de cet exercice est d'expliciter toutes les matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\sigma_1(M) = \sum_{j=1}^{3} m_{1,j}\ , \quad \sigma_2(M) = \sum_{j=1}^{3} m_{2,j}\ , \quad \sigma_3(M) = \sum_{j=1}^{3} m_{3,j}, \quad \sigma_4(M) = \sum_{i=1}^{3} m_{i,1}\ ,$$
$$\sigma_5(M) = \sum_{i=1}^{3} m_{i,2}\ , \quad \sigma_6(M) = \sum_{i=1}^{3} m_{i,3}, \quad \sigma_7(M) = \sum_{i=1}^{3} m_{i,i}\ , \quad \sigma_8(M) = \sum_{i=1}^{3} m_{i,4-i}.$$

On admettra que les huit applications $\sigma_1, \dots, \sigma_7$ et σ_8 sont linéaires.

Pour tout couple $(k,l) \in [\![1,3]\!]^2$, on note $E_{k,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui situé à l'intersection de la k-ième ligne et de la l-ième colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.
On notera $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\sigma_7(A) = 0$.

  a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

  b. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui à toute matrice M associe le vecteur

$$\varphi(M) = \Big(\sigma_1(M), \sigma_2(M), \sigma_3(M), \sigma_4(M), \sigma_5(M), \sigma_6(M), \sigma_7(M), \sigma_8(M)\Big) \in \mathbb{R}^8.$$

2. a. Montrer que φ est une application linéaire.

  b. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\sigma_1(M) = \sigma_2(M) = \sigma_3(M) = \sigma_4(M) = \sigma_5(M) = \sigma_6(M) = \sigma_7(M) = \sigma_8(M).$$

  a. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

  b. Montrer que : $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

  c. On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

    i. Montrer que : $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\}$.

    ii. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{G}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = N + x \cdot J,$$

    avec $N \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

    iii. En déduire que : $\mathcal{G} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(J)$.

  d. Établir que : $\mathrm{rg}(F) = 7$.

  e. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ puis une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (pour ceci, on pourra judicieusement exploiter la matrice J et les exemples donnés en introduction).

  f. Conclure.